9-1 Koordinatsystem och funktioner. Namn:………………………………

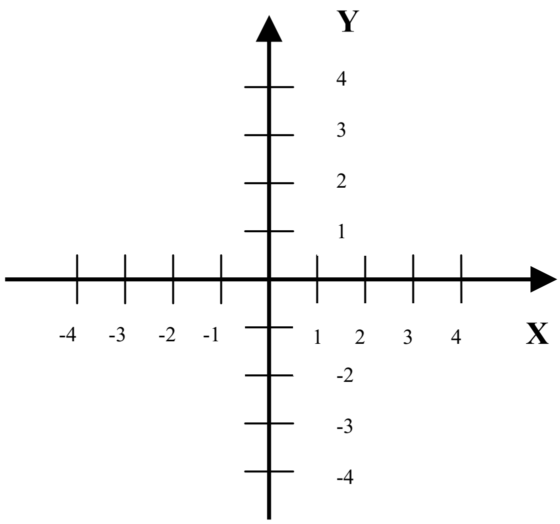
Inledning

I det här kapitlet skall du lära dig vad ett koordinatsystem är och vilka egenskaper det har. I ett koordinatsystem kan man representera matematiska funktioner i form av kurvor, eller grafer, och du kommer att studera några grundläggande sådana. Låter det abstrakt och svårt? Visst, innan du startat med något nytt så kan allting verka lite jobbigt. Men vänta bara! När du studerat detta kapitel har du en bra utgångspunkt till att studera hur man kan visa många händelser och skeenden. Det går du igenom i nästa kapitel.

Vad är ett koordinatsystem?

När två linjer skär varandra så bildar de ett plan, eller en plan yta. Om linjerna är oändligt långa, så blir planet oändligt stort. Vi antar att linjerna skär varandra med rät vinkel.

Om linjerna är två tallinjer, så har du en utmärkt möjlighet att dela in planet i rutor för att kunna bestämma var du är. Du kan jämföra med den sfäriska ytan som jordklotet utgör. Där har man byggt upp ett rutnät av longituder och latituder för att kunna lägesbestämma orter osv. Men nu har du en plan yta, och två vinkelräta axlar. Vi lägger dem som på bilden. Den horisontella axeln kallas X-axel, och den vertikala för Y-axel. Positiva tal är åt höger eller uppåt. Skärningspunkten mellan axlarna kallas för Origo.

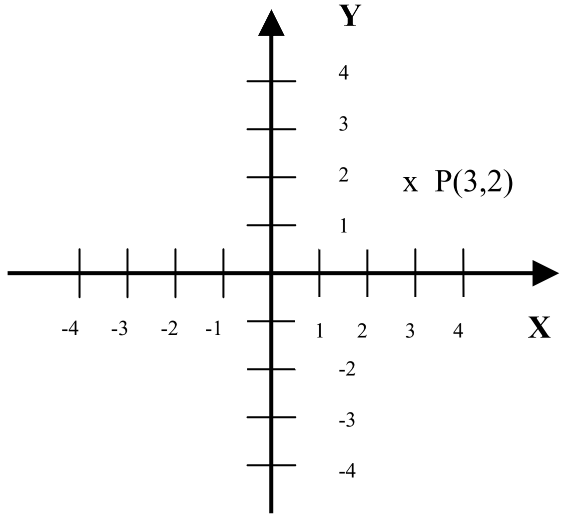


Hur lokaliserar jag punkter i ett koordinatsystem?

Planet är nu indelat i fyra delar, som kallas kvadranter. Den första är uppe till höger. En punkt, kallad P, i första kvadranten har ett bestämt läge. Med punktens x-koordinat menas hur långt ut längs x-axeln som punkten befinner sig, till exempel x=3, och med punktens y-koordinat menas hur långt upp längs y-axeln som punkten befinner sig. Till exempel y=2. Ett enkelt sätt att beteckna punktens läge är då att skriva så här:

P(3,2) Detta betyder: P har x-koordinaten 3 och y-koordinaten 2

Här har vi markerat punkten P(3,2) i koordinatsystemet. Ett kryss är satt exakt i punkten, och P(3,2) är skrivet i anslutning till punkten så det inte skall råda något tvivel om vad som gäller.



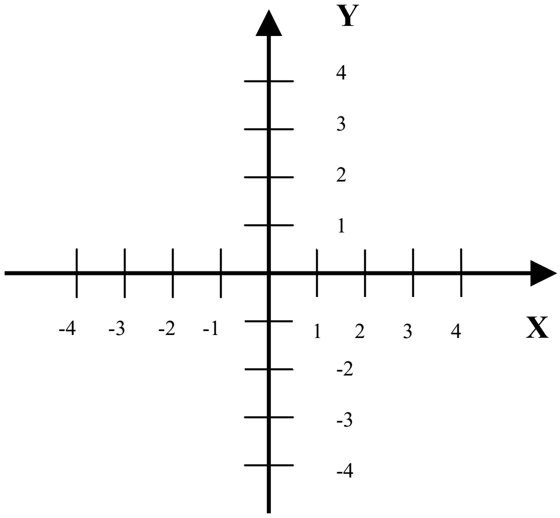
Vi tar ett övningsexempel:
Placera in följande punkter i koordinatsystemet till höger.

P_1 (2,3)

P_2 (-3,2)

P_3 (-2,-4)

P_4 (3,-3)



Hur delar ett koordinatsystem upp det tvådimensionella planet?

Som du ser delar koordinatsystemet planet i fyra delar, som kallas kvadranter, Det kan vara praktiskt att ge dem namn, så slipper man förklara varje gång vad man menar.

Den **första kvadranten** ligger uppe till höger. Här är alla x- och y-värden positiva.

Den **andra kvadranten** ligger uppe till vänster. X-värdena är negativa medan y-värdena är positiva.

Den **tredje kvadranten** ligger nere till vänster. Både x-värden och y-värden är negativa.

Den **fjärde** och sista ligger nere till höger. X-värdena är positiva medan y-värdena är negativa.

9-1-01: Vilken av punkterna P_1 - P_4 ligger i kvadrant 1, 2, 3 och 4?

Svar:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

9-1-02: Rita ett koordinatsystem i rutan till höger, och sätt in följande punkter:

P_1 (0,3)

P_2 (-2,-4)

P_3 (3,-3)

P_4 (3,-3)

P_5 (0,0)

P_6 (3,0)

Som du ser hamnar en punkt på x-axeln. Den har y-koordinaten 0. Av samma anledning har en punkt som ligger på y-axeln x-koordinaten 0. Ligger punkten i Origo, något som ju måste vara tillåtet, så har den både x-koordinaten=0 och y-koordinaten=0.

Alla punkter på x-axeln har y-koordinaten = 0

Alla punkter på y-axeln har x-koordinaten = 0

Ekvationen för en rät linje

Sätt ut följande punkter i koordinatsystemet till höger:

P_1 (0,-1)

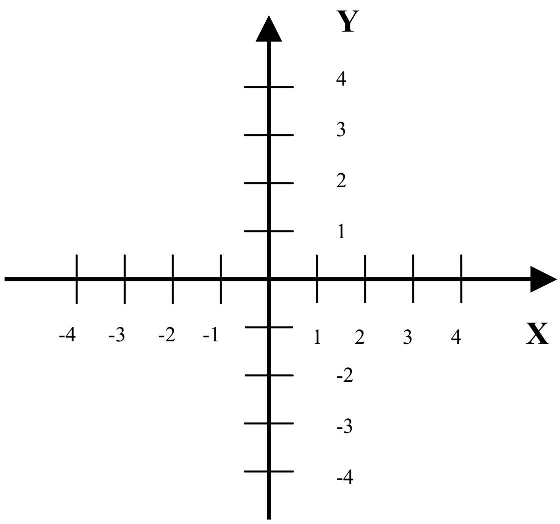
P_2 (-2,-3)

P_3 (3,2)

P_4 (-3,-4)

P_5 (-1,-2)

P_6 (4,3)



Slutsats?

Svar:..

....

Visst. De ligger alla på en rät linje. Den lutar snett upp till höger, snett ner till vänster. Då uppkommer helt naturligt frågan:

> ”kan man på ett matematiskt sätt uttrycka hur x-koordinaterna och y-koordinaterna knyts samman för att punkterna skall ligga på en rät linje?”

Svaret är ja!

Ser du något samband mellan x-koordinat och y-koordinat i de fem punkterna ovan? Tag en funderare, och prova dig fram. Sambandet skall gälla för alla punkter.

Svar:…………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

Efter lite funderande och provande kom du säkert till följande slutsats: **punktens y-koordinat är alltid en enhet mindre än dess x-koordinat!**

Eftersom du är van att hantera matematiska uttryck, så kan du ju skriva ner detta:

$$\boxed{y = x - 1}$$

Det som står ovan gäller med andra ord för **alla punkter på linjen!** (inte bara för heltalsvärden)

Det kallas för **den räta linjens ekvation**, och den gäller för just den linje som de fem punkterna ovan ligger på.

Vi tar några exempel:

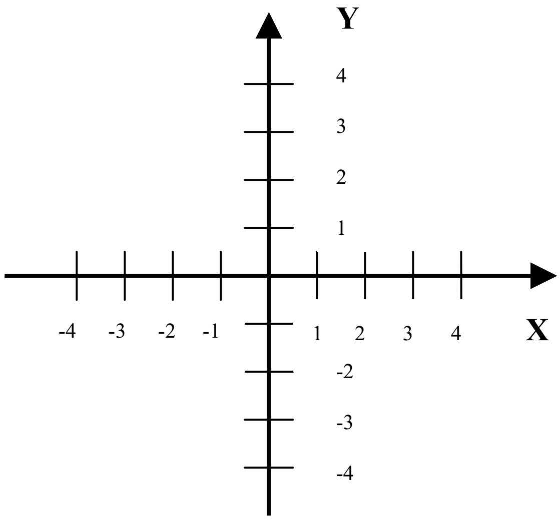
9-1-03 Rita ut linjen $y = x + 1$

genom att först bestämma tre punkter med givna x-värden, och som ligger på linjen:

P_1 (0,……..)

P_2 (-2,……)

P_3 (3,……..)



9-1-04 Rita följande linjer:

$y_1 = x$

$y_2 = x + 1$

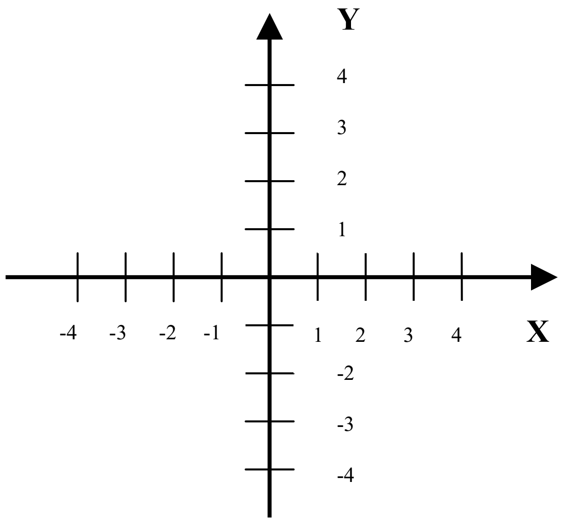
$y_3 = x - 1$

$y_4 = 2x$

$y_5 = 2x + 1$

$y_6 = -x + 1$

$y_7 = -2x + 1$



Eftersom du vet att det blir räta linjer, så räcker det med att bestämma två punkter på varje linje. Markera varje linjes nummer, så att du kan identifiera dem senare.

Som du ser ovan kan en rät linjes ekvation allmänt skrivas på följande form:

$$\boxed{y = kx + l}$$

I fallet (2) är $k = 1$ och $l = 1$, medan i fallet (7) är $k = -2$ och $l = 1$.

Besvara nu nedanstående frågor. Du måsta ha gjort alla 7 linjerna i 9-1-04 innan du går till nästa uppgift.

9-1-05 Om k ändras från 1 till 2 som i fallet (2) och (5): hur går det med lutningen på linjen?

Svar:……………………………………………………………………………

9-1-06 Om k ändras från +1 till -1 som i fallen (2) och (6) ovan: hur går det med lutningen?

Svar:……………………………………………………………………………

9-1-07 Om l ändras från 0 som i (1) till +1 som i (2) eller till -1 som i fallet (3), hur går det med linjens skärningspunkt med y-axeln?

Svar:……………………………………………………………………………

Sammanfattning:

En rät linjes ekvation kan skrivas: $y = kx + l$

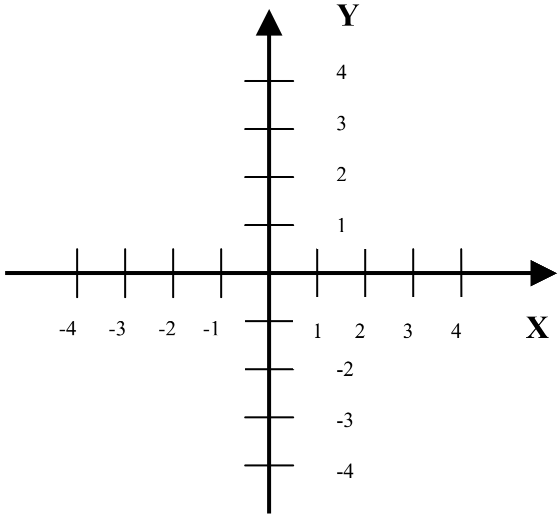
k bestämmer hur brant linjen lutar, och åt vilket håll

l bestämmer var linjen skär y-axeln (då är ju x=0)

En icke-linjär funktion

Allt är inte räta linjer. Du skall undersöka hur en funktion av andra graden ser ut när man ritar upp den i ett koordinatsystem.

Rita upp funktionen $y = x^2 - 1$ genom att först bestämma y-värden för några gotdyckligt väada punkter. Varför inte ta följande:



P_1 (2,…….)

P_2 (1,……)

P_3 (0,……)

P_4 (-1,…..)

P_5 (-2,…...)

Pricka in de 5 punkterna och förbind dem till en mjuk rund kurva.

Det här blev något annat än en rät linje!

9-1-08 Var skär kurvan x-axeln (det vill säga där y=0)?

Svar:……………………………………………….

9-1-09 Vilka lösningar har ekvationen $x^2 - 1 = 0$?

Svar:……………………………………………….

Som du ser övergår en funktion till en ekvation där funktionens y-värde sätts till 0. Ekvationens lösning ser du med andra ord som skärningspunkterna med x-axeln. Kolla med de linjära funktionerna ovan om du inte tror att det stämmer!

Veckans gåta:

Vad är det som blir större och större ju mer som man tar bort?

Visa dina lösningar och diskutera dessa med din lärare. Det finns mer att jobba med, så du blir mer säker på att arbeta med grafer. Kämpa på!

9-1 Koordinatsystem. Träningsuppgifter

Nivå 1:

9-1-100 Vad menas med ett koordinatsystem?

9-1-101 Vad menas med X-axeln i ett koordinatsystem?

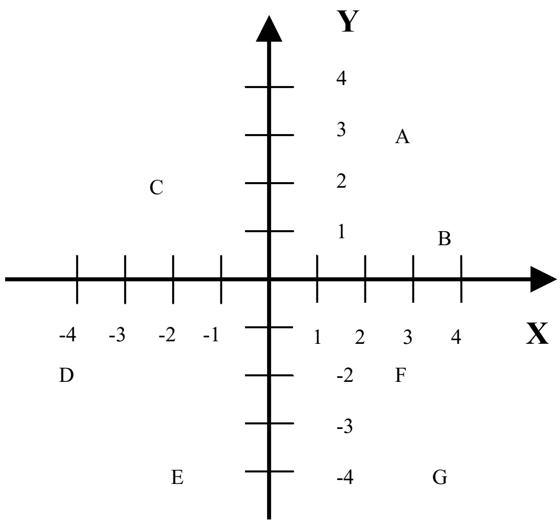
9-1-102 Vad menas med Y-axeln i ett koordinatsystem?

9-1-103 Vad menas med kvadranter och vad karaktäriserar de fyra kvadranterna?

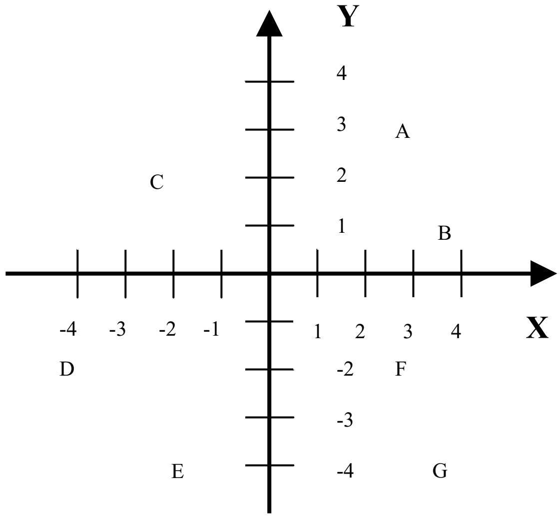
9-1-104 Rita ett koordinatsystem och sätt ut punkterna P_1 (1,3), P_2 (4,0), P_3 (-2,-3) och P_4 (-3,-4)

9-1-105 Vilka koordinater har punkterna A-G i vidstående koordinatsystem?

Svara med heltal.



9-1-106 Vilka av punkterna A-G i vidstående koordinatsystem ligger i kvadrant 1, 2 och 4?



9-1-107 Rita ett koordinatsystem, och rita in linjen y= 2x-2

9-1-108 Rita ett koordinatsystem, och rita in linjen y=-x+3

9-1-109 Vilka av linjerna 1: $y = 2x+1$ och
2: $y = x + 4$ lutar brantast?
Motivera ditt svar.

9-1-110 Hur kan man se på en linjes
funktion att linjen lutar nedåt?

Nivå 2:

9-1-200 Rita ett koordinatsystem, och rita in funktionen $y = x^2 - 4$. I vilka punkter skär kurvan x-axeln?

9-1-201 Rita ett koordinatsystem, och rita in funktionen $y = -x^2 + 9$. I vilka punkter skär kurvan x-axeln?

9-1-202 Hur ser ekvationen ut för den linje som bildas av alla punkter som har y-värdet 2?

9-1-203 Hur ser ekvationen ut för den linje som bildas av alla punkter som har y-värdet 0? Vad kallas den linjen?

9-1-204 Ekvationen för en rät linje kan skrivas på formen $y = kx + l$. Vad har l för betydelse?

Nivå 3:

9-1-300 Rita ett koordinatsystem och rita in följande funktioner:
$y = x^2 - 1$ och
$y = x - 1$
I vilka punkter skär kurvorna varandra?

9-1-301 Du har två funktioner: $y = x^2 - 1$ och $y = x - 1$. Räkna ut i vilka punkter som linjerna skär varandra? (använd alltså inte ett koordinatsystem och rita in funktionerna där). Tänk på att för skärningspunkten skall det gälla att motsvarande y-värde skall vara lika. Utnyttja detta och sätt upp en ekvation och lös den. Jämför resultatet med uppgift 9-1-300.

9-1-302 Rita ett koordinatsystem och rita in linjen för de punkter som alla har x-värdet = 3. Hur går linjen, och skriv ett matematiskt uttryck för linjens funktion.

9-1-303 Skriv upp funktionen för den linje som består av punkter som alla har x-värdet = 0. Hur går linjen, och vad kallas den?

9-1-304 Rita ett koordinatsystem, och rita in följande funktioner:

$y = - x^2 + 2$ och
$y = 2x – 1$

I vilka punkter skär kurvorna varandra?

9-1-305 I vilka punkter skär följande funktioner varandra:
$y = x^2 + 2$ och
$y = x – 1$
Gör ett koordiatsystem och rita in de båda kurvorna.

9-1-306 I vilka punkter skär följande funktioner varandra:
$y = x^2 + 2$ och
$y = x – 1$

För skärningspunkten skall gälla att y-värdena skall vara lika. Sätt upp en ekvation och lös ut x. Vilken ekvation får du, och hur ser lösningen ut? Jämför med uppgift 9-1-305.